Chapitre 4 La forme de la Terre

1 Connaître les mots-clés

- **Arc de méridien :** chemin qui relie deux points d'un même méridien en suivant ce méridien.
- **Arc de parallèle :** chemin qui relie deux points d'un même parallèle en suivant ce parallèle.
- **Grand cercle :** intersection de la sphère terrestre et d'un plan qui passe par son centre.
- **Latitude :** angle mesuré à partir de l'équateur.
- **Longitude :** angle mesuré à partir du méridien de Greenwich.
- **Méridien :** grand cercle qui passe par les deux pôles. La circonférence d'un méridien est environ 40 000 km.
- **Mètre :** unité de mesure de longueur créée en 1799.
- **Parallèle :** intersection de la sphère terrestre et d'un plan parallèle à celui de l'équateur.
- **Triangulation :** méthode de mesure de distances à l'aide d'une chaîne de triangles.

a. Le degré : unité de mesure d'angle ; 90° est la mesure d'un angle droit.	**h.** Éclipse de Lune : occultation du Soleil par la Terre.

2 Restituer le cours

1. Le premier savant ayant avancé des arguments scientifiques quant à la forme sphérique de la Terre est Aristote, au IVe siècle avant J.-C.

2. Une éclipse de Lune permet d'observer la forme arrondie de l'ombre de la Terre sur la Lune.

3. La méthode de triangulation ne nécessite qu'une seule mesure de distance AB. On considère ensuite un triangle ABC, dans lequel on mesure tous les angles, et on en déduit les longueurs de tous les côtés du triangle ABC à l'aide de formules de trigonométrie. On peut ensuite réitérer l'opération avec un autre triangle adjacent au triangle ABC.

On construit alors une chaîne de triangles adjacents et on obtient par mesures d'angles puis calculs les longueurs de tous les côtés de ce triangle.

4. La mission de Delambre et Méchain a permis de déterminer la longueur d'un arc du méridien de Paris. Le mètre a été alors défini en 1799 comme la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

3 Déterminer la longueur d'un chemin reliant deux points

1. a. Vrai. Ce sont tous des cercles de centre le centre de la Terre et de rayon le rayon de la Terre. Leur longueur est d'environ 40 000 km.

b. Faux. Les parallèles n'ont pas tous la même longueur. Tout dépend de la latitude des points du parallèle : le parallèle le plus long est l'équateur, et il est beaucoup plus long qu'un parallèle proche des pôles.

c. Faux. La représentation choisie fausse le jugement. En effet, la longueur du parallèle sur lequel sont situés les points U et Z est inférieure à celle du parallèle sur lequel sont situés les points C et M, car ce parallèle est plus éloigné de l'équateur.

d. Faux. Le plus court chemin est l'arc du grand cercle qui les relie ; le parallèle qui les relie n'est pas un grand cercle.

2. A-1. La longueur d'un arc de méridien est proportionnelle à l'angle qu'il intercepte.

En notant O le centre de la Terre, $\widehat{BOW} = 60° + 15° = 75°$.

En notant L la longueur de l'arc de méridien $\overset{\frown}{BW}$ et L_C la circonférence de la Terre, on a :

$\frac{L_C}{360} = \frac{L}{75}$ donc $L \approx \frac{40\,000}{360} \times 75$

B-1 et 4. Ce parallèle est une réduction du cercle de l'équateur et le coefficient de réduction est égal à cos (45°).

La longueur du parallèle est donc d'environ 40 000 × cos (45°) kilomètres, soit environ 28 284 kilomètres.

C-1 et 3. La longueur d'un arc de parallèle est proportionnelle à l'angle qu'il intercepte.

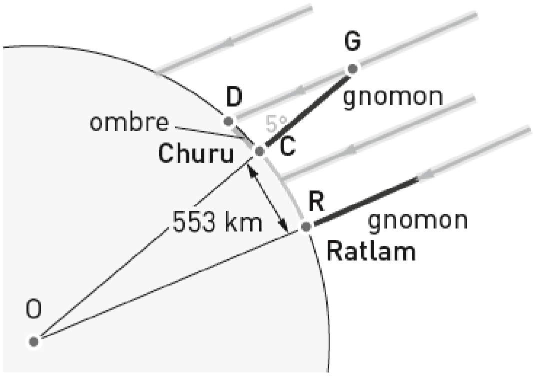
En notant D le centre du parallèle $\widehat{UDZ} = 90° - 0° = 90°$.

En notant L la longueur de l'arc de parallèle $\overset{\frown}{UZ}$, on a :

$\frac{28\,284}{360} \approx \frac{L}{90}$ donc $L \approx \frac{28\,284}{360} \times 90$ kilomètres,

soit 7 071 kilomètres.

4 Appliquer la méthode d'Ératosthène



On note L la circonférence de la Terre. On veut calculer L connaissant la longueur d de l'arc de cercle $\overset{\frown}{RC}$ et l'angle $\widehat{CGD}$.

La longueur d de l'arc de cercle $\overset{\frown}{RC}$ est proportionnelle à l'angle $\widehat{ROC}$ qui l'intercepte.

Donc : $\frac{L}{360} = \frac{d}{\widehat{ROC}}$.

Or d = 553 km et comme les angles $\widehat{ROC}$ et $\widehat{CGD}$ sont alternes-internes, on a :

$\widehat{ROC} = \widehat{CGD} = 5{,}00°$.

Ainsi : $\frac{L}{360} = \frac{553}{5{,}00}$.

Par conséquent, $L = \frac{553}{5{,}00} \times 360 = 3{,}98 \times 10^4$.

La circonférence de la Terre est d'environ $3{,}98 \times 10^4$ km.

5 Appliquer la méthode de triangulation

1. Dans le triangle ABC, on applique la formule des sinus :

$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}}$

D'où : $\frac{100}{\sin 35°} = \frac{AC}{\sin 80°}$

et par conséquent $AC = \frac{100}{\sin 35°} \times \sin 80°$.

On en déduit que AC vaut environ 172 mètres, en arrondissant au mètre.

2. La somme des angles d'un triangle est 180°. En appliquant ce résultat au triangle ACD, on obtient :

$\widehat{CAD} + 25° + 30° = 180°$,

d'où $\widehat{CAD} = 180° - 130° - 25°$

soit $\widehat{CAD} = 25°$.

3. On applique à présent la formule des sinus dans le triangle ACD :

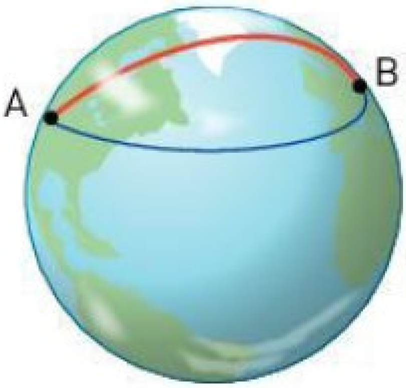
$\frac{AC}{\sin \hat{D}} = \frac{CD}{\sin \hat{A}}$.

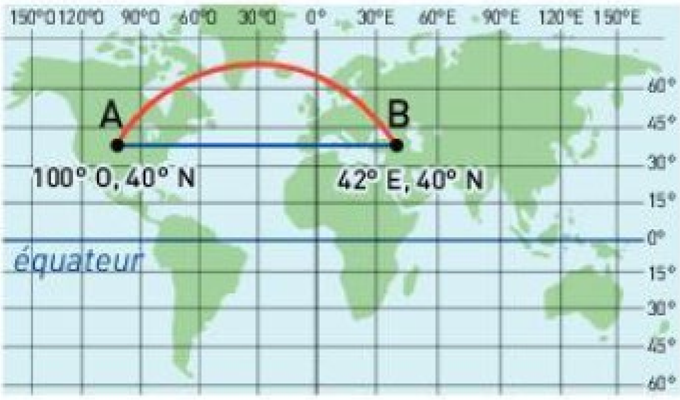
D'où : $\frac{172}{\sin 130°} \approx \frac{CD}{\sin 25°}$ et par conséquent

$CD \approx \frac{172}{\sin 130°} \times \sin 25°$.

On en déduit que CD vaut environ 95 mètres.

6 Calcul de la longueur d'un arc de parallèle





Exemple de rédaction

1. Ces deux points sont situés sur un même parallèle car **ils ont la même latitude**.

2. Ce parallèle est une réduction du cercle de l'équateur. Le coefficient de réduction est cos α, où α est la latitude.
Ainsi, la longueur L_P du parallèle est : $L_P \approx 40\ 000 \cos 40°$, soit $L_P \approx 30\ 642$ km.

3. Comme A et B sont de part et d'autre du méridien de Greenwich, l'angle $\widehat{ACB}$ est la somme des longitudes de ces deux points. Donc $\widehat{ACB} = 100° + 42° = 142°$.

4. La longueur L de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ est proportionnelle à l'angle $\widehat{ACB}$ qui l'intercepte. Donc : $\frac{L}{142} = \frac{L_P}{360}$.

Par conséquent, $L \approx \frac{30\ 642}{360} \times 142$, soit $\boldsymbol{L \approx 12\ 087}$ **km**.

5. a. Le chemin qui suit le parallèle est **le chemin bleu**.
b. Non, ce n'est pas le plus court chemin. Le plus court chemin est celui qui suit le grand cercle qui passe par A et B. Il est représenté en rouge.

Quelques conseils

2. La longueur d'un parallèle s'exprime en fonction de la circonférence de la Terre (environ 40 000 km) et du cosinus de la latitude.

3. Regarder si les points sont du même côté ou de part et d'autre du méridien de Greenwich.

4. La longueur d'un arc de parallèle s'exprime en fonction de la longueur du parallèle et de la somme ou de la différence des longitudes des deux extrémités de l'arc.

7 Calcul de la longueur d'un arc de méridien

1. Les points A et B ont la même longitude : 100° Ouest. Ils sont donc sur le même méridien.

2. A et B sont du même côté de l'équateur (au Nord) car leurs latitudes respectives sont 20° **Nord** et 66° **Nord**. Donc l'angle $\widehat{AOB}$ est la différence de ces latitudes : $\widehat{AOB} = 66° - 20° = 46°$.

3. La longueur L de l'arc de méridien reliant les points A et B est proportionnelle à l'angle $\widehat{AOB}$ qui l'intercepte. En notant L_T la circonférence de la Terre, on a donc : $\frac{L_T}{360} = \frac{L}{\widehat{AOB}}$.

Or $L_T \approx 40\ 000$ et $\widehat{AOB} = 66°$ donc $\frac{40\ 000}{360} \approx \frac{L}{46}$.

Donc $L \approx \frac{40\ 000}{360} \times 46$, soit $L \approx 5\ 111$ km.
La longueur L de l'arc de méridien reliant les points A et B est d'environ 5 111 kilomètres.

4. C'est bien le plus court chemin car un méridien est un grand cercle : en effet, il a pour centre le centre de la Terre.

10 Triangulation avec une chaîne de trois triangles

1. On calcule d'abord le troisième angle du triangle AMC. La somme des angles d'un triangle étant 180°, on a : $\widehat{AMC} = 180° - 22° - 34° = 124°$.

Dans le triangle AMC, on applique la loi des sinus : $\frac{AM}{\sin(34°)} = \frac{AC}{\sin(124°)}$.

On en déduit : $AM = \frac{10 \times \sin(34°)}{\sin(124°)}$, soit 6,7 km à 0,1 km près.

On applique à nouveau la loi des sinus dans ce même triangle AMC : $\frac{MC}{\sin(22°)} = \frac{AC}{\sin(124°)}$.

D'où : $MC = \frac{10 \times \sin(22°)}{\sin(124°)}$, soit 4,5 km à 0,1 km près.

2. Les angles $\widehat{AMC}$ et $\widehat{CMN}$ sont supplémentaires (leur somme est un angle plat), donc :

$\widehat{CMN} = 180° - \widehat{AMC} = 180° - 124° = 56°$.

Puisque la somme des angles d'un triangle est 180°, on obtient : $\widehat{MNC} + 47° + 56° = 180°$, et ainsi :

$\widehat{MNC} = 180° - 47° - 56° = 77°$.

3. On applique à présent la loi des sinus dans le triangle CMN :

$\frac{MN}{\sin(47°)} = \frac{MC}{\sin(77°)}$ d'où : $MN = \frac{4{,}5 \times \sin(47°)}{\sin(77°)}$, soit 3,4 km à 0,1 km près.

Dans le même triangle, on a : $\frac{CN}{\sin(56°)} = \frac{MC}{\sin(77°)}$

d'où : $CN = \frac{4{,}5 \times \sin(56°)}{\sin(77°)}$, soit 3,8 km à 0,1 km près.

4. Les angles $\widehat{MNC}$ et $\widehat{CNE}$ sont supplémentaires, donc : $\widehat{CNE} = 180° - \widehat{MNC} = 180° - 77° = 103°$.

Puisque la somme des angles d'un triangle est 180°, on obtient :

$\widehat{CEN} + 47° + 103° = 180°$

et ainsi : $\widehat{CEN} = 180° - 47° - 103° = 30°$.

Pour calculer la distance NE, on applique la loi des sinus dans le triangle CNE :

$\frac{NE}{\sin(47°)} = \frac{CN}{\sin(30°)}$ d'où : $NE = \frac{3{,}8 \times \sin(47°)}{\sin(30°)}$, soit 5,6 km à 0,1 km près.

5. Les points A, M, N et E sont alignés, donc : AE = AM + MN + NE

D'où AE ≈ 6,7 + 3,4 + 5,6 en kilomètres.

La distance AE mesure 15,7 km à 0,1 km près.

14 Méthode d'Ératosthène

1. Les angles $\hat{b}$ et $\widehat{BOG}$ sont alternes-internes, d'où : $\widehat{BOG} = 30°$.

Les angles a et $\widehat{AOG}$ sont alternes-internes, donc $\widehat{AOG} = 11°$.

On a : $\widehat{BOG} = \widehat{AOG} + \widehat{BOA}$, donc $\widehat{BOA} = 30° - 11° = 19°$.

2. On note L la circonférence de la Terre.

On a : $\frac{L}{360} = \frac{2\,115}{19}$

Donc $L = \frac{2\,115}{19} \times 360$, soit environ 40 074 km.

15 Prépa BAC Choisir le plus court chemin

1. Chittagong et Ulaangom sont sur un même méridien.

Cracovie et Ulaangom sont sur un même parallèle.

2. a. En notant L la longueur de l'arc de méridien, on a :

$\frac{40\,000}{360} \approx \frac{L}{27{,}5°}$ et donc $L \approx \frac{40\,000}{360} \times 27{,}5$, soit environ 3 056 km.

b. Oui, c'est le plus court chemin, car un méridien est un grand cercle (il passe par le centre de la Terre).

3. a. Ce parallèle est une réduction du cercle de l'équateur et le coefficient de réduction est : cos (50°). La longueur du parallèle est donc d'environ 40 000 × cos (50°), soit environ 25 712 km.

b. En notant L la longueur de l'arc de parallèle, on a :

$\frac{25\,712}{360} \approx \frac{L}{92 - 20}$ et donc $L \approx \frac{25\,712}{360} \times 72$, soit environ 5 142 km.

c. Non, le plus court chemin est l'arc du grand cercle qui relie ces deux villes.

4. En suivant l'arc de parallèle, la consommation est de 15 426 litres (car 5 142 × 3 = 15 426).

En suivant le plus court chemin, la consommation est de 14 799 litres (car 4 933 × 3 = 14 799).

La différence de consommation est de 627 litres de kérosène.